Thomas Vasques Melo

10/08/24

(1) Para que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam coplanares, $\begin{vmatrix} m-3 & 0 & -m \\ 0 & -2 & 24 \\ -1 & 2-m & 1 \end{vmatrix} = 0$. Logo:

$$\begin{vmatrix} m-3 & 0 & -m \\ 0 & -2 & 24 \\ -1 & 2-m & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} m-3 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 2-m \end{matrix} = 0$$

$-2m + 6 - (-24m^2 + 120m - 144 - 2m) = 0 \therefore$

$-2m + 6 - (-24m^2 + 118m - 144) = 0 \therefore -2m + 6 + 24m^2 - 118m + 144 = 0$

$\therefore (24m^2 - 120m + 150 = 0) \div 6 \therefore 4m^2 - 20m + 25 = 0$

Resolvendo por Bhaskara:

$$m = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \therefore m = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \therefore$$

$$m = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{8} \therefore m = \frac{20 \pm 0}{8} \therefore m = \frac{20}{8} \therefore m = 5/2$$

□

(2) A priori, calcularemos os produtos vetorial e escalar. Com eles, montaremos um sistema:

$$(x, y, z) \wedge (1, -1, -1) = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$(-y-(-z), z-(-x), -x-y) = (-y+z, z+x, -x-y) = (1, 1, 0)$$

$(x, y, z) \cdot (2, 3, 4) = 2x + 3y + 4z = 9$. Logo:

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ z + x = 1 \\ -x - y = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

spiral

Thomas Vasques Melo

10/08/24

$2x = 9 - 3y - 4z \therefore \boxed{x = \frac{9 - 3y - 4z}{2}}$ $\quad -x + y = 0 \leftrightarrow \boxed{-y = +x}$

$-y + z = 1 \therefore x + z = 1 \therefore \left(\frac{9 - 3y - 4z}{2} + z = 1\right) \cdot 2 \therefore$

$9 - 3y - 4z + 2z = 2 \therefore 9 - 3y - 2z = 2 \therefore 3y + 2z = 7 \therefore$

$2z = 7 - 3y \therefore \boxed{z = \frac{7 - 3y}{2}}$

$z + x = 1 \therefore \left(\frac{7 - 3y}{2} - y = 1\right) 2 \therefore 7 - 3y - 2y = 2 \therefore$

$-5y = -5 \therefore y = -5/-5 \therefore y = 1$

$\rightarrow$ Logo, $x = -1$

$z + x = 1 \therefore z - 1 = 1 \therefore z = 2$

Portanto, $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$ □

③ Descobriremos os ângulos internos do triângulo através do cosseno:

$\vec{AB} = (2-3, -3-4, 4-4)$
$(-1, -7, 0)$
$\vec{AC} = (6-3, 0-4, 4-4)$
$(3, -4, 0)$
$\vec{BA} = -\vec{AB} = (1, 7, 0)$
$\vec{BC} = (6-2, 0-(-3), 4-4)$
$(4, 3, 0)$

$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{(-1)3 + (-7)(-4) + 0 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}}$

$= \frac{-3 + 28}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \therefore$

$\cos A = \sqrt{2}/2$, logo $A = 45°$

$\cos B = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{1 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 7^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{4 + 21}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \therefore \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $B = 45°$

spiral

Thomas Vasques Melo

10/08/24

$$\cos C = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|} = \frac{(-3)(-4) + 4(-3) + 0 \cdot 0}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}}$$

$\vec{CA} = -\vec{AC} = (-3, 4, 0)$

$\vec{CB} = -\vec{BC} = (-4, -3, 0)$

$$= \frac{12 - 12}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{0}{25} \therefore \cos C = 0, \text{ logo } C = 90°$$

Para determinar a área do triângulo ABC, utilizaremos $\frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2}$:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 4 - (-21)) = (0, 0, 25)$$

$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 25^2} = \sqrt{25^2} = 25$. Portanto, $S_{\Delta ABC} = 25/2 = 12,5 \text{ u.c}$

□

(4) Para determinar a equação geral de π, vamos encontrar o vetor diretor de r, pois se $r \perp \pi$, seu vetor diretor também será:

Colocaremos r em função de t, sendo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t/2 \end{cases} \qquad r: (1, 0, 0) + t(1, 1, 1/2)$$

→ vetor diretor de r!

Substituindo A, B e C da equação geral do plano ($Ax + By + Cz + D = 0$) pelas coordenadas do vetor diretor de r, teremos:

$\pi: x + y + z/2 + D = 0$. Podemos substituir x, y e z pelo ponto P que pertence ao plano π para achar D. Logo:

$\pi: 1 + 1/4 + 4/2 + D = 0 \therefore \pi: 4 + 1 + 8 + 4D = 0 \therefore \pi: 4D = -13$

$\pi: D = -13/4$. Assim, obtemos a seguinte equação do plano π:

$\pi: x + y + z/2 - 13/4 = 0$ OU $\pi: 4x + 4y + 2z - 13 = 0$

spiral

Thomas Vasques Melo

10/08/24

Para descobrir a intersecção de π e r, basta substituir as coordenadas de r na equação geral de π:

$\pi: 4(t+1) + 4t + 2t/2 - 13 = 0 \therefore 4t+4+4t+t-13=0 \therefore$

$\pi: 9t - 9 = 0 \therefore \pi: 9t = 9 \therefore t = 1$

Sendo assim, podemos substituir esse valor de t e achar as coordenadas do ponto de encontro entre π e r:

$$\begin{cases} x = t+1 = 1+1 = 2 \\ y = t = 1 \\ z = t/2 = 1/2 \end{cases}$$

Dessa forma, π e r se encontram no ponto $(2, 1, 1/2)$

□